ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 21, Nos. 2–3, 1975

UNE REMARQUE SUR LES ISOMORPHISMES DE SCHEMAS DE BERNOULLI QUI PRESERVENT CERTAINS FACTEURS

PAR

PAUL SHIELDS ET JEAN-PAUL THOUVENOT†

ABSTRACT

By slightly strengthening the hypothesis, we quickly arrive at, in a new case, some results from the paper *Remarquessur les systèmes dynamiques donnés avec plusieurs facteurs.*

Introduction

On considère deux partitions dénombrables d'entropies égales (et finies) R et R_1 possédant chacune deux sous-partitions P et Q, et P_1 et Q_1 respectivement de façon que

(1) $$R = P \vee Q$$

(2) $$R_1 = P_1 \vee Q_1$$

(3) $$E(R) = E(R_1); \quad E(P) = E(P_1); \quad E(Q) = E(Q_1).$$

On considère les deux schémas de Bernoulli (X, T) et (X_1, T_1) munis des générateurs indépendants R et R_1 respectivement (i.e. $X = R^{\mathbf{Z}}$ et T est la translation. De même pour X_1 et T_1). Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la condition (3) entraînent que (X, T) est isomorphe à (X_1, T_1), que $((P)_T, T)$ est isomorphe à $((P_1)_{T_1}, T_1)$ et qu'il en est de même de $((Q)_T, T)$ et de

$((Q_1)_{T_1}, T_1)$ $\left((P)_T = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P\right)$.

Le problème que l'on se pose est de savoir à quelle condition il existe un

† Equipe de Recherche n°1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la section n°1 "Mathématiques, Informatique" associée au C.N.R.S.

Received January 25, 1975

isomorphisme de (X, T) sur (X_1, T_1) qui envoie $(P)_T$ sur $(P_1)_{T_1}$ et $(Q)_T$ sur $(Q_1)_{T_1}$. (i.e. il existe deux partitions de X, $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ telles que:

$$(\bar{P} \vee \bar{Q}, T) \sim (P_1 \vee Q_1, T_1) \tag{4}$$

$$(\bar{P})_T = (P)_T \tag{5}$$

$$(\bar{Q})_T = (Q)_T.) \tag{6}$$

Convenons de dire que $R = P \vee Q$ et $R_1 = P_1 \vee Q_1$ sont équivalentes quand un tel isomorphisme existe. Il est prouvé dans [1] qu'il existe une partition finie $R = P \vee Q$ telle que si $R_1 = P_1 \vee Q_1$ est une partition finie équivalente à R, alors $d(P \vee Q) = d(P_1 \vee Q_1)$. La démonstration qui est donnée à cet endroit ne peut pas s'appliquer au cas où $d(P) = d(Q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Notre but ici est de prouver le résultat suivant:

Soit $R = P \vee Q$ telle que:

$$d(P) = d(Q) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \tag{7}$$

$$P \wedge Q = \nu \tag{8}$$

$$P \text{ n'est pas indépendant de } Q. \tag{9}$$

Alors si $R_1 = P_1 \vee Q_1$ est une partition équivalente à $R = P \vee Q$, on a nécessairement $d(P \vee Q) = d(P_1 \vee Q_1)$. (Remarquons que dans ce résultat on a supprimé l'hypothèse que R_1 est finie.)

Dans toute la suite $R = P \vee Q$ désigne une partition fixée vérifiant (7), (8) et (9).

Rappels. *Soit* $R = P \vee Q$ *identifié à la coordonnée* 0 *dans* (X, T) *et soit* $A_0 = E^P E^Q E^P$ *qui est un opérateur positif de* $L^2(R) \to L^2(R)$. *Il admet deux valeurs propres* 1 *et* λ $(0 < \lambda < 1)$. *Il existe donc* f *qui est P-mesurable telle que* $Af = \lambda f$. *Soit* A *l'opérateur de* $L^2(R)_T \to L^2(R)_T$ *défini par* $A = E^{(P)_T} E^{(Q)_T} E^{(P)_T}$. *Alors le lemme* 4 *de* [1] *nous fournit le*

Lemme 0. *L'opérateur* A *est à spectre discret. Son spectre est composé des nombres* λ^i, $i \geqq 0$. *Le sous-espace propre* $\mathcal{H}_\lambda$ *associé à la valeur propre* λ *est la fermeture dans* $L^2(X)$ *des combinaisons linéaires finies des fonctions* $T^i f$, $i \in Z$.

Nous prouvons maintenant le

Lemme 1. *Soit* $g \in \mathcal{H}_\lambda$. *Si* g *ne prend presque-sûrement qu'un nombre au plus dénombrable de valeurs, il existe une partie finie* I *de* Z *et des nombres réels* a_i, $i \in I$, *tels que* $g = \sum_{i \in I} a_i T^i f$. (*et* g *ne prend qu'un nombre fini de valeurs*).

DÉMONSTRATION. Soient u et v les valeurs prises par f. Soit $g = \Sigma_{i=-\infty}^{+\infty} a_i T^i f$, avec une infinité de a_i non-nuls. Soit i_0 tel que $a_{i_0} \neq 0$. On pose $g_0 = a_0 T^{i_0} f$. Soit I_n un sous-ensemble fini de $\mathbf{Z}$ et $g_n = \Sigma_{i \in I_n} a_i T^i f$. On définit I_{n+1} et g_{n+1} de la façon suivante: g_n ne prend qu'un nombre fini $N(n)$ de valeurs: $\alpha_{n,k}$, $1 \leqq k \leqq N(n)$. Soit $\alpha_n = \inf_{k \neq l} |\alpha_{n,k} - \alpha_{n,l}|$. Comme $\|g\|^2 = \Sigma_{-\infty}^{\infty} |a_i|^2$ il existe $i_{n+1} \notin I_n$ tel que $a_{i_{n+1}} \neq 0$ et $a_{i_{n+1}} < \alpha_n / 2(A)$ $(A = \max(|u|, |v|))$. Soit $I_{n+1} = I_n \cup \{i_{n+1}\}$ et $g_{n+1} = \Sigma_{i \in I_{n+1}} a_i T^i f$ $(I_0 = i_0)$. Soit $\bar{I} = \bigcup_n I_n$ et $I^* = \mathbf{Z} - \bar{I}$. Alors $g = \bar{g} + g^*$ (p. s.) où $\bar{g}$ et g^* sont indépendantes ($\bar{g} = \Sigma_{i \in \bar{I}} a_i T^i f$, $g^* = \Sigma_{i \in I^*} a_i T^i f$) et où la tribu engendrée par $\bar{g}$ est exactement $\vee_{i \in \bar{I}} T^i P$. Quand $\bar{I}$ est infini g ne peut pas prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs.

LEMME 2. *Soit I un ensemble fini de $\mathbf{Z}$ et a_i, $i \in I$, une suite de nombre réels non-nuls. Soit $g = \Sigma_{i \in I} a_i T^i f$. Si I possède plus d'un élément, les fonctions $T^n g$, $n \in \mathbf{Z}$ ne peuvent pas être indépendantes.*

DÉMONSTRATION. Soit M la plus grande valeur prise par g. Elle n'est prise que sur un seul atome de la partition $\vee_{i \in I} T^i P$. Soit p ce cylindre. Alors pour tout entier n tel que $I \cap T^n I \neq \varnothing$ $m(p \cap T^n p) \neq m(p)^2$. D'où le résultat.

PROPOSITION. *Soit $R = P \vee Q$ avec*

$$d(P) = d(Q) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \tag{1}$$

$$P \wedge Q = \nu \tag{2}$$

$$P \text{ n'est pas indépendante de } Q. \tag{3}$$

Soit (X, T) le schéma de Bernoulli avec R comme générateur indépendant. Soient P_1 et Q_1 deux partitions dénombrables telles que si $R_1 = P_1 \vee Q_1$

$$\text{les} \quad T^i R_1, \quad i \in \mathbf{Z} \quad \text{sont indépendantes} \tag{4}$$

$$(P)_T = (P_1)_T \tag{5}$$

$$(Q)_T = (Q_1)_T. \tag{6}$$

Alors $d(P \vee Q) = d(P_1 \vee Q_1)$. (On prouve en fait qu'il existe un entier k tel que $P_1 \vee Q_1 = T^k P \vee Q$.)

DÉMONSTRATION. Soit A_1 l'opérateur de $L^2(P_1)$ dans $L^2(P_1)$ défini par $A_1 = E^{P_1} E^{Q_1} E^{P_1}$; le Lemme 4 de [1] et le Lemme 0 entraînent qu'il existe une fonction g dans $L^2(P_1)$ telle que $A_1 g = \lambda g$. Soit $\bar{P}$ la partition engendrée par g. Comme $\bar{P}$ est dénombrable, le Lemme 1 entraîne que $\bar{P}$ est en fait fini et le

Lemme 2 qu'il existe un entier k_1 tel que $\bar{P} = T^{k_1}P$. Comme $\bar{P}$ est incluse dans P_1 les conditions (4) et (5) entraînent $P_1 = T^{k_1}P$. On prouverait de même que $Q_1 = T^{k_2}P$. Les conditions (2) et (4) entraînent alors que $k_1 = k_2 = k$. Ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

1. J. P. Thouvenot, *Remarques sur les systèmes dynamiques donnés avec plusieurs facteurs*, Israel J. Math. **20** (1975), 215–232.

LABORATOIRE DE PROBABILITÉS
UNIVERSITÉ DE PARIS VI — TOUR 56
4, PLACE JUSSIEU, 75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE

AND

UNIVERSITY OF TOLEDO
TOLEDO, OHIO, U. S. A.